

# Odraz světla, BRDF

Petr Kadleček

17. října 2011

## Úvod

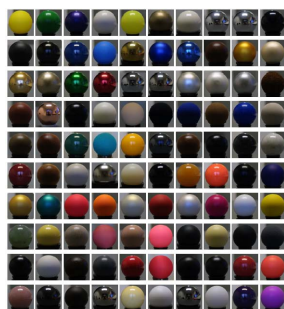
V minulé přednášce jsme si představili matematický model scény včetně geometrie, materiálů, zdroje světla, kamery, atd. Ukázali jsme si, že při formulaci nějakého modelu, musíme brát zřetel na úroveň detailů objektů, které chceme modelovat a na nutnost zavedení zjednodušujících předpokladů kvůli výpočetním nárokům. Při formulaci modelu světla jsme se zajímali o popis světla, charakteristiku a způsob měření světla, prostorové rozložení světla, interakci světla s hmotou a o podmínky na rovnovážné rozložení světla ve scéně. Formulovali jsme si jakým způsobem je světlo odražené v prostoru a nyní nás zajímá, co se světlem stane, když dopadne na nějaký povrch.

## Interakce světla s povrchem

Model scény zahrnuje následující typy interakce světla s povrchem:

- Odraz (ideální zrcadlový, lesklý, atp.)
- Absorpce (pohlčení a zeslabení záření při jeho šíření prostorem, změna např. na teplo)
- Lom (také refrakce, dochází k němu na rozhraní dvou prostředí s různou optickou hustotou)
- Rozptyl pod povrchem (subsurface scattering, BSSRDF - funkce modelu odrazů světla pod povrchem)

Tyto odrazové vlastnosti materiálu určují vztah odražené radiance vůči radianci dopadlé na povrch objektu.



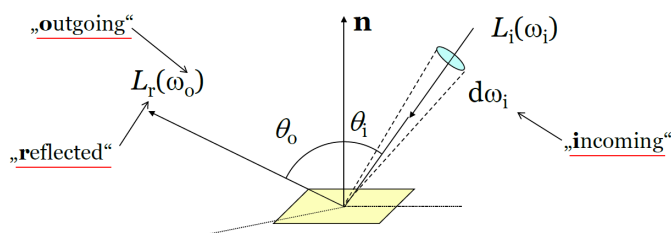
Obrázek 1: Interakce světla s povrchem (zdroj: MERL BRDF database)

Obrázek 1 ukazuje identicky osvětlené objekty stejného tvaru, avšak rozdílných materiálů a tedy rozdílných vlastností odrazu světla na povrchu.

## BRDF

Odrazové vlastnosti materiálu formálně popisujeme pomocí matematické abstrakce zvané BRDF (Bidirectional reflectance distribution function, dvousměrová distribuční funkce odrazu) definované jako funkce dvou parametrů (směr dopadajícího světla  $\omega_i$  a směr odraženého světla  $\omega_o$ ), jež vyjadřuje poměr odražené diferenciální radiance  $L_r(\omega_o)$  vůči radianci dopadlé na povrch  $L_i(\omega_i)$ :

$$f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{dL_r(\omega_o)}{dE(\omega_i)} = \frac{dL_r(\omega_o)}{L_i(\omega_i)(\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i} = \frac{dL_r(\omega_o)}{L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i} \quad [\text{sr}^{-1}]$$



Obrázek 2: BRDF

Intuice je následující: jaká je **hustota pravděpodobnosti**, že foton, který přiletí na povrch ze směru  $\omega_i$ , se odrazí ve směru  $\omega_o$ ? Obor hodnot této funkce je  $f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \in [0, \infty)$ . Pro úplnost si uvedeme vztah radiance a iradiance z minulé přednášky:

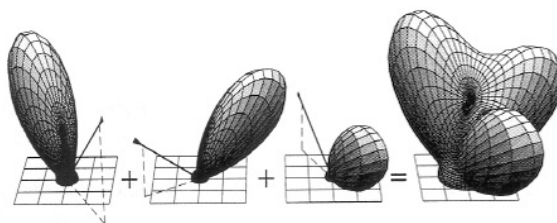
$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \vec{\omega}) \cdot \cos \theta \cdot d\vec{\omega}$$

BRDF je model toho, co se ve skutečnosti děje na úrovni **mikrostruktury** při pohledu z dálky. Popis dalších členů BRDF viz obrázek 2.

## Vlastnosti BRDF

### Linearita

BRDF je lineární vzhledem k radianci, tedy výsledná odražená energie může být příspěvkem několika nezávislých zdrojů světla z různých směrů viz obrázek 3.



From Sillion, Arvo, Westin, Greenberg

Obrázek 3: BRDF linearita

### Helmholzova reciprocita

Další důležitá vlastnost BRDF je Helmholzova reciprocita (Helmholtzův zákon), kterou musí dodržet každá fyzikálně korektní BRDF:

$$f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) = f_r(\omega_o \rightarrow \omega_i)$$

## Zachování energie

Poměr odraženého zářivého toku k příchozímu zářivému toku je menší, nebo roven 1:

$$\frac{d\Phi_r}{d\Phi_i} = \frac{\int_{\omega_r} L_r(\omega_r) \cos \theta_r d\omega_r}{\int_{\omega_i} L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i} = \frac{\int_{\omega_r} \int_{\omega_i} f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \cos \theta_r d\omega_r}{\int_{\omega_i} L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i} \leq 1$$

Intuice: plocha nemůže odrazit více, než je celková přijatá energie.

## (An)izotropie BRDF

Většina materiálů má izotropní BRDF, což znamená, že BRDF je invariantní k otočení kolem normály. Tedy odrazové vlastnosti nezávisí na tomto otočení a BRDF má pouze 3 stupně volnosti (viz poslední rovnost v (1)) oproti obecné BRDF, která má 4 stupně volnosti.

$$f_r(\theta_i, \phi_i; \theta_o, \phi_o) = f_r(\theta_i, \phi_i + \phi; \theta_o, \phi_o + \phi) = f_r(\theta_i, \theta_o, \phi_o - \phi_i) \quad (1)$$

Pro anizotropní BRDF však toto neplatí a při pohledu z různých směrů vypadá materiál rozdílně. To je dáno především různou mikroskopickou hrubostí povrchu v různých směrech (broušené kovy, tkaniny). Pro popis anizotropní BRDF se zpravidla užívá referenční souřadný systém (U, V, W), kde U je tangenta (např. směr broušení kovu), V je binormála a N je normála (osa Z lokálního souřadného systému).

## Rovnice odrazu

Pomocí BRDF máme charakterizovány odrazové vlastnosti povrchu. Nyní se budeme zajímat o to, kolik světla se odrazí do daného směru, přesněji jaká je odražená radianční  $L_r$  ve směru  $\omega_o$  v závislosti na množství příchozího světla  $L_i$  a materiálu povrchu  $f_r$ . To nám určuje rovnice odrazu, také Reflectance equation, illumination integral, OVTIGRE („outgoing, vacuum, time-invariant, gray radiance equation“).

Přímo z definice BRDF vyplývá:

$$dL_r(\omega_o) = f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot L_i(\omega_i) \cdot \cos \theta_i d\omega_i$$

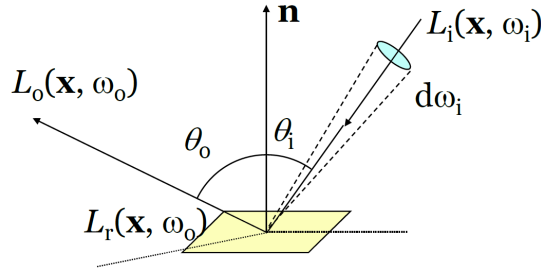
Zintegrováním („sečtením“) příspěvků  $dL_r(\omega_o)$  přes celou hemisféru dostáváme (viz obrázek 4.):

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(x)} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i d\omega_i$$

Scéna by však nebyla osvětlená, pakliže by neexistoval žádný emitör. Proto je celková radianční  $L_o$  rovna součtu odražené radianční  $L_r$  a emitované radianční  $L_e$ :

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_r(\mathbf{x}, \omega_o) + L_e(\mathbf{x}, \omega_o)$$

Tato rovnice odrazu již může sloužit pro samotné renderování obrázku. Například pokud je jediným zdrojem světla ve scéně mapa prostředí (environment map) a zajímá nás pouze výpočet přímého osvětlení, integruje se přes celou hemisféru a za BRDF můžeme zvolit kupříkladu Phongův model.



Obrázek 4: Rovnice odrazu

## Od lokálního odrazu ke globálnímu šíření světla

Rovnice odrazu nám ve skutečnosti nestačí. Světlo, které zohledňujeme při výpočtu rovnice odrazu, přesněji při výpočtu příchozí radiance  $L_i$ , nepřichází pouze ze zdrojů, ale také přichází po mnoha odrazech od jiných objektů ve scéně.

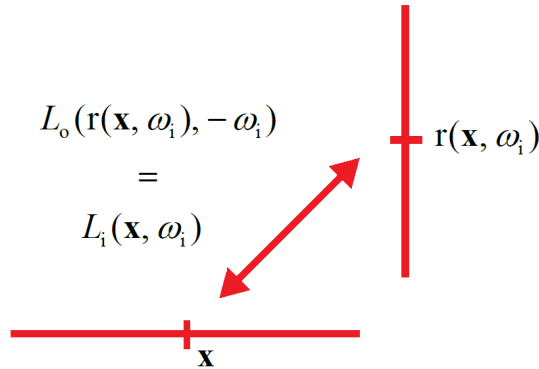
Jak vypočítat takové  $L_i$ ? Stačí si uvědomit a využít vlastnosti radiance, která říká, že radiance je konstantní podél celé dráhy paprsku. Pro úplnost viz předchozí přednáška:

$$\underbrace{L_1 d\vec{\omega}_1 dA_1}_{\text{emitovaný výkon}} = \underbrace{L_2 d\vec{\omega}_2 dA_2}_{\text{přijímaný výkon}} .$$

a tedy:

$$L_i(\mathbf{x}, \omega_o) = L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i)$$

kde  $r(\mathbf{x}, \omega_i)$  je funkce vržení paprsku (ray casting function) viz obrázek 5.



Obrázek 5: Ray casting function

Nyní dosadíme  $L_i$  do rovnice odrazu a dostaneme:

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(x)} L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i d\omega_i$$

## Zobrazovací rovnice – Rendering equation

Odstraněním dolního indexu „o“ u odchozí radiance  $L_o$  v předchozí integrální rovnici dostaneme rovnici, které se říká zobrazovací rovnice (rendering equation, RE):

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(x)} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Všimněte si důležitého faktu, že odchozí radiance  $L_o$  je nyní popsána jako funkce  $L_o$  jinde ve scéně. Zobrazovací rovnice se dá tedy chápat jako popis ustáleného stavu, tj. **energetické rovnováhy** ve scéně a **rendering** je tudíž výpočet  $L_o(\mathbf{x}, \omega_o)$  pro místa viditelná přes pixely.

### Rovnice odrazu vs. zobrazovací rovnice

Je důležité pochopit rozdíl mezi rovnicí odrazu a zobrazovací rovnicí. Rovnice odrazu popisuje **lokální** odraz světla v jednom místě. Jedná se o integrál, pomocí něhož lze spočítat odchozí radianci z příchozí radiance v daném bodě.

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(x)} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

Naproti tomu zobrazovací rovnice je integrální rovnice, matematicky zcela odlišný aparát (neznámá  $L$  se vyskytuje na obou stranách rovnice), který popisuje globální rozložení světla ve scéně.

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(x)} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

## Zpět k BRDF - Odrazivost (reflektance)

Odrazivost je veličina odvozená z BRDF a je definovaná jako poměr **příchozího a odraženého toku**. Pro difúzní odraz je často označována jako *albedo* (definuje se také jako míra odrazivosti tělesa nebo jeho povrchu, velké hodnoty dosahují například mraky, čerstvě napadaný sníh, ...).

Existují tři základní varianty odrazivosti:

- hemisféricko-hemisférická odrazivost, kde nás zajímá poměr celkového toku přes celou hemisféru vůči odchozímu toku přes celou hemisféru
- hemisféricko-směrová odrazivost, kde se zajímáme o to, „kolik světla se odrazí do směru  $\omega_o$  při osvětlení **uniformní jednotkovou příchozí radiancí**.“
- směrovo-hemisférická odrazivost, která říká, „jaké procento světelného toku příchozího ze směru  $\omega_i$  je odraženo (do libovolného směru)?“

## Hemisféricko-směrová odrazivost

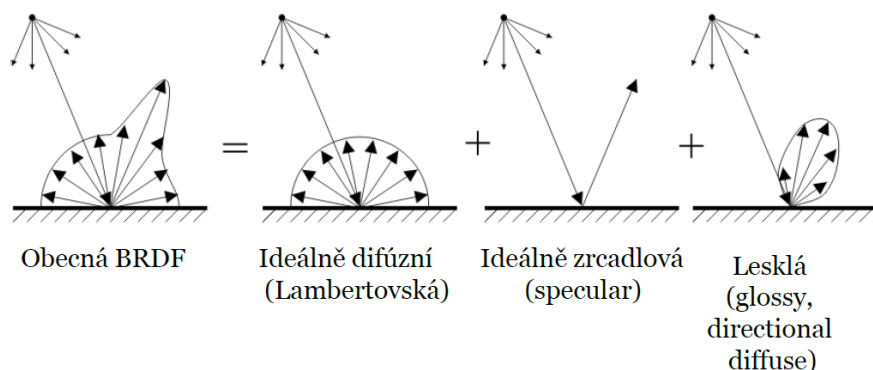
Hemisféricko-směrová odrazivost je definována jako:

$$\rho(\omega_o) = a(\omega_o) = \int_{H(x)} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

$\rho(\omega_o)$  je nezáporná, menší rovna 1 (zachování energie) a platí  $\rho(\omega_o) \in [0, 1]$ , navíc je ekvivalentní se **směrovo-hemisférickou odrazivostí** (ekvivalence vyplývá z Helmholtzovy reciprocity pro BRDF).

## Druhy BRDF

BRDF zpravidla dělíme na (viz obrázek 6): obecné BRDF, ideálně difúzní (Lambertovská), ideálně zrcadlová (specular) a lesklá BRDF (glossy, directional diffuse).



Obrázek 6: Druhy BRDF

## Ideálně difúzní odraz

Ideálně difúzní odraz (a.k.a. Lambertovský odraz) má konstantní BRDF nezávislou na  $\omega_o$  a  $\omega_i$ , tedy světlo se se stejnou pravděpodobností odrazí do všech směrů (nezávisle na příchozím směru).

$$f_{r,d}(\omega_i \rightarrow \omega_o) = f_{r,d}$$

Pro odraz na Lambertovském povrchu platí:

$$L_o(\omega_o) = f_{r,d} \int_{H(x)} L_i(\omega_i) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i = f_{r,d} \cdot E$$

Takovýto odraz je pohledově nezávislý na  $\omega_o$  a odrazivost se dá tedy zjednodušit na:

$$\rho_d = \int_{H(x)} f_{r,d}(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i = \pi \cdot f_{r,d}$$

Ideálně difúzní odraz však v reálném světě neexistuje. Výrobci barev se velmi snaží Lambertovský odraz napodobit, ale pro velké úhly incidence se to obzvláště nedaří.

## Bílá tma

Při zatažené obloze nepoznáme tvar terénu pokrytého sněhem, avšak blízko zdroje toto neplatí. Tento efekt je znám také jako bílá tma. Proč k tomu dochází? Pokud budeme předpokládat konstantní radianci z oblohy  $L_i(\mathbf{x}, \omega_i) = L^{obloha}$  a Lambertovský sníh, dostaneme odraženou radianci jako:

$$L_o^{snih} = \rho_d^{snih} \cdot L_i^{obloha}$$

$L_o$  tedy nezávisí nejen na úhlu pohledu, ale v tomto případě hlavně ani na normále povrchu (radianci z oblohy je konstantní ve směrech) a proto je pro nás obtížné rozpoznat tvary předmětů.